数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(1):43–54
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0005

随机线性互补问题的无约束优化再定式*

吴学谦[1] 李声杰[1]

提要 针对随机线性互补问题, 提出等价的无约束优化再定式模型, 即由 D-间隙函数定义的确定性的无约束期望残差极小化问题. 通过拟 Monte Carlo 方法, 将样本进行了推广, 得到了相关的离散近似问题. 在适当的条件下, 提出了最优解存在的充分条件, 以及探究了离散近似问题的最优解及稳定点的收敛性. 另外, 在针对一类带有常系数矩阵的随机互补线性问题, 研究了解存在的充要条件.

关键词 随机线性互补问题, 无约束期望残差极小化, 拟 Monte Carlo 方法
MR (2000) 主题分类 90C15, 90C33
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)01-0043-12

1 介绍

给定一映射 $f: R^n \to R^n$ 及非空凸集 $S \subseteq R^n$, 经典的变分不等式问题 (简记为 VIP), 记作 VI(f,S), 即求解 $x \in S$, 使得

$$(y-x)^{\mathrm{T}} f(x) \geqslant 0, \quad \forall\, y \in S \tag{1.1}$$

成立. 特别地, 当 S 为非空凸集 $R^n_+ := \{x \in R^n \mid x \geqslant 0\}$ 时, 变分不等式可写成如下形式:

$$x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant 0, \quad x^{\mathrm{T}} f(x) = 0. \tag{1.2}$$

这就是所谓经典的互补问题 (简记为 CP).

这些问题被广泛应用于不同的均衡模型之中, 如交通运输、经济均衡、工业设计等等, 详见文 [1]. 随着理论的日益发展, 许多系统科学的经典算法自然地被推广至优化领域, 诸如 Newton 法、SOR 法、投影法及非线性 Jacobi 方法等等, 详见文 [2–3].

众所周知, 现实世界中有很多问题会涉及不确定因素, 漠视这些不确定因素将会导致决策失误, 因此对随机变分不等式及随机互补问题的研究就很有必要. 为了考虑这些不确定因素, 随机变分不等式及随机互补问题受到了越来越多学者的关注. 1999 年, Gürkan[4]等人提出了随机变分不等式的样本途径方法, 即假设在某种意义下存在一函数列收敛于原随机函数的平均值, 通过求解该函数列的变分不等式, 从而得到期望值模型的近似解. 2005 年, 期望残差极小化模型由 Chen 和 Fukushima[5]提出, 其基本思想是首先利用 NCP 函数将随机线性互补问题转化为随机方程组, 然后通过构建该方程组期望的极小化模型, 进而将问题转化为求确定性的期望残差极小化问题. 受该思想启发, 文 [6] 提出随机变分不等式的期望残差极小化模型, 其基本思想是利用正则化间隙函数将随机变分不等式转化为随机方程组, 构建关于该方程组期望的极小化问题, 进而讨论了当随机函数为仿射时期望残差极小化模型的可微性质以及水平集的有界性. 再进一步, 利用了拟 Monte Carlo 方法建立了期望残差极小化问题的离散近似问题, 并证明了一些关于最优解的存在

本文 2017 年 3 月 29 日收到, 2018 年 4 月 14 日收到修改稿.
[1]重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331. E-mail: xueqianwu1992@163.com; lisj@cqu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11571055, No. 11171362) 的资助.

性及收敛性结果. 随后, Ma[7]等人考虑带有非线性扰动的随机仿射变分不等式问题, 将文章中的结果进行推广. 前述文献大部分都是对随机变分不等式的正则化间隙函数求期望, 把随机问题转化为一个期望残差极小化问题, 该方法对厚尾分布的数据具有稳健性, 但在解的有效性方面存在较大限制. 而最小二乘法是对正态分布最有效的方法, 但却对数据非常敏感. 为此, 文 [8] 提出了加权期望残差法, 即综合绝对值残差方法及最小二乘残差方法各自优势, 利用它们的凸组合, 针对带有非线性扰动的随机仿射变分不等式问题, 建立加权期望残差极小化问题. 更多关于随机变分不等式及随机互补问题的详细内容, 可见文 [4–13] 及其参考文献.

在本文中, 假定 $M:\Omega\to R^{n\times n}$ 和 $q:\Omega\to R^n$ 在给定的样本空间 Ω 中连续且可积, 我们寻求如下随机线性互补问题的解, 即求解 $x\in R^n$, 使得

$$F(x,\omega):=M(\omega)x+q(\omega)\geqslant 0,\quad x\geqslant 0,\quad x^{\mathrm T}F(x,\omega)=0,\quad \text{a.e. }\omega\in\Omega \tag{1.3}$$

成立, 其中 $(\Omega,\mathcal{F},\rho)$ 为概率空间, $\Omega\subseteq R^m$, 且 a.e. 为给定概率测度下几乎处处的缩写. 在下文中, 为了符号的方便使用, 记 $S:=R^n_+$.

一般来说, 由于随机事件的多样性, 问题 (1.3) 基本无解. 因此, 研究该问题的首要思想是建立较为合理的确定性模型, 进而寻求随机互补问题的最优解.

为此, 我们利用 D-间隙函数的期望对原问题进行了再定式, 建立了无约束期望残差极小化问题. Yamashita 等人[14]定义的 D-间隙函数如下:

$$g_{\alpha\beta}(x,\omega):=g_\alpha(x,\omega)-g_\beta(x,\omega),\quad \forall x\in R^n,\quad \omega\in\Omega, \tag{1.4}$$

其中 $0<\alpha<\beta$ 为常数, $g_\gamma\ (\gamma=\alpha,\beta):R^n\times\Omega\to R$ 即由 Fukushima 在文 [15–16] 定义的正则化间隙函数

$$\begin{aligned}g_\gamma(x,\omega):&=\max_{y\in S}\Big\{(x-y)^{\mathrm T}F(x,\omega)-\frac{\gamma}{2}\|x-y\|^2\Big\}\\&=(x-H_\gamma(x,\omega))^{\mathrm T}F(x,\omega)-\frac{\gamma}{2}\|x-H_\gamma(x,\omega)\|^2,\end{aligned} \tag{1.5}$$

其中 $H_\gamma(x,\omega):=\mathrm{Proj}_S(x-\gamma^{-1}F(x,\omega))$ 和 Proj_S 为映射到凸集 S 上的投影算子.

注意到 S 表示 R^n_+, 故而有

$$(\mathrm{Proj}_S(x-\gamma^{-1}F(x,\omega)))_i=\max\{0,(x-\gamma^{-1}F(x,\omega))_i\}.$$

于是对任意的 $i=1,\cdots,n$, 有

$$(x-H_\gamma(x,\omega))_i=\min\{x_i,(\gamma^{-1}F(x,\omega))_i\}, \tag{1.6}$$

其中下标 i 表示向量的第 i 个分量. 在这里, 我们指出对于任意的 $x\in R^n$, $g_\gamma(x,\cdot)$ 在 Ω 上可积, 且对任意的 $x\in R^n$ 和 $\omega\in\Omega$, $g_\gamma(x,\omega)\geqslant 0$.

根据文 [1], 对所有的 $\omega\in\Omega$, 若 $F(\cdot,\omega)$ 连续, 则随机 D-间隙函数 $g_{\alpha\beta}(\cdot,\omega)$ 连续, 且拥有如下性质:

(a) 对于任意的 $x\in R^n$, 都有 $g_{\alpha\beta}(x,\omega)\geqslant 0$ 成立;

(b) 对于任意的 $g_{\alpha\beta}(x,\omega)=0$, 当且仅当 x 是问题 (1.3) 的解;

(c) 若函数 $F(\cdot,\omega)$ 是连续可微的, 那么函数 $g_{\alpha\beta}(\cdot,\omega)$ 也在 R^n 上是连续可微的, 并且有

$$\begin{aligned}\nabla_x g_{\alpha\beta}(x,\omega)=&\nabla_x F(x,\omega)(H_\beta(x,\omega)-H_\alpha(x,\omega))\\&+\alpha(H_\alpha(x,\omega)-x)-\beta(H_\beta(x,\omega)-x).\end{aligned} \tag{1.7}$$

根据以上事实, 可把函数 $g_{\alpha\beta}$ 当作损失函数. 如此, 问题 (1.3) 等价于求解如下无约束优化

问题:

$$\min\ \theta(x) := E[g_{\alpha\beta}(x,\omega)] = \int_\Omega g_{\alpha\beta}(x,\omega)\rho(\omega)\mathrm{d}\omega, \tag{1.8}$$

这里 $E(\cdot)$ 表示关于随机变量 $\omega\in\Omega$ 的期望, $\rho:\Omega\to[0,+\infty)$ 表示连续的密度函数, 且满足

$$\int_\Omega \rho(\omega)\mathrm{d}\omega = 1. \tag{1.9}$$

我们注意到在现有文献中出现了许多求解随机优化问题的期望残差方法, 例如文 [5–6] 等等, 这些方法都可直接运用于问题 (1.3). 与现有方法相比, 本节提出的无约束优化再定式模型拥有两大优势: (1) 现存期望残差法将原问题转化为带约束的优化问题, 而本节方法将问题 (1.3) 转化为无约束优化问题; (2) 本节方法较之现存方法拥有更好的逼近效果, 现举例说明.

例 1.1　给定 $x\in R$, $\omega\in\Omega=\{-1,1\}$, $\alpha=1$, $\beta=2\alpha$, $M(\omega)=q(\omega)=\omega$, 即 $F(x,\omega)=\omega x+\omega$. 假设 ρ 为 Ω 上的均匀密度函数. 对于问题 (1.3), 我们仅需要考虑 $x\in R_+$. 由 Φ $(\Phi(x,\omega)) := \min\{x,F(x,\omega)\}$ (详见文 [5]) , g_α 及 $g_{\alpha\beta}$ 的定义, 对任意的 $x\in R_+$, 有

$$\begin{aligned}
\Phi(x,1) &= \min\{x,x+1\} = x,\\
\Phi(x,-1) &= \min\{x,-x-1\} = -x-1,\\
g_\alpha(x,1) &= (x-H_\alpha(x,1)^{\mathrm T}F(x,1) - \frac12\|x-H_\alpha(x,1)\|^2\\
&= \min\{x,x+1\}(x+1) - \frac12\|\min\{x,x+1\}\|^2\\
&= \frac12 x^2 + x.
\end{aligned}$$

同理, 可得

$$\begin{aligned}
g_\alpha(x,-1) &= \frac12(x+1)^2,\\
g_\beta(x,1) &= \begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac14(x+1)^2, & x\geqslant 1,\end{cases}\\
g_\beta(x,-1) &= \frac14(x+1)^2,
\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta}(x,1) &= \begin{cases} \frac12 x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac14(x^2+2x-1), & x\geqslant 1,\end{cases}\\
g_{\alpha\beta}(x,-1) &= \frac14(x+1)^2.
\end{aligned}$$

因此

$$\theta_1(x) = E[\|\Phi(x,\omega)\|]^2 = x^2 + x + \frac12,$$

$$\theta_2(x)=E[g_\alpha(x,\omega)]=\frac{1}{2}\Big(x^2+2x+\frac{1}{2}\Big),$$

$$\theta_3(x)=E[g_{\alpha\beta}(x,\omega)]=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(3x^2+2x+1), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{4}(x^2+2x), & x\geqslant 1.\end{cases}$$

显然, 我们观察到对于所有的 $x\in R_+$, 有 $\theta_1(x)\geqslant\theta_2(x)\geqslant\theta_3(x)\geqslant 0$, 这意味着 $\min\limits_{x\in R_+}\theta_3(x)$ 较之 $\min\limits_{x\in R_+}\theta_1(x)$, $\min\limits_{x\in R_+}\theta_2(x)$ 更接近于零, 而对所有的 $x\in R_+$, x^* 是问题 (1.3) 的解当且仅当 $\theta_i(x^*)=0$ $(i=1,2,3)$, 故本文提出的方法更逼近最小值.

在下文中, 我们进一步假设

$$E[(\|M(\omega)\|+\|q(\omega)\|)^2]<+\infty. \tag{1.10}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$E[(\|M(\omega)\|+\|q(\omega)\|)]\leqslant\sqrt{E[(\|M(\omega)\|+\|q(\omega)\|)^2]}<+\infty. \tag{1.11}$$

我们对本章的剩余内容安排如下: 第 2 节介绍后续章节所需预备知识及引理; 第 3 节讨论了无约束优化再定式模型 (1.8) 的光滑性及水平集的有界性, 并进一步研究了离散近似问题最优解的收敛性质; 针对一类带有常系数矩阵的随机线性互补问题, 我们在第 4 节中给出了水平集有界的充要条件; 在第 5 节中, 我们对本章作了一些总结.

2 预备知识

在本节中, 我们对一些基本概念及符号作出相关说明, 并介绍了一些重要引理.

定义 2.1 矩阵 M 称之为 R_0 矩阵, 如果其满足

$$x\geqslant 0,\quad Mx\geqslant 0,\quad x^{\mathrm{T}}Mx=0\quad\Longrightarrow\quad x=0.$$

定义 2.2 对于给定的函数 $\theta(x)$, 其水平集的定义为: $L_\theta:=\{x\in R^n\mid\theta(x)\leqslant c\}$, 其中常数 c 满足 $c>0$.

拟 Monte Carlo 方法应用于数值积分, 详见文 [17–18]. 在本文中, 对于正整数 k, 我们定义

$$\theta^k(x):=\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g_{\alpha\beta}(x,\omega^i)\rho(\omega^i),$$

其中 $\Omega_k:=\{\omega^i,i=1,\cdots,N_k\}$ 为由拟 Monte Carlo 方法得到的样本观察值, 并满足 $\Omega_k\subset\Omega$ 且当 $k\to\infty$ 时, $N_k\to\infty$. 接下来, 我们考虑问题 (1.8) 的离散近似

$$\min\ \theta^k(x) \tag{2.1}$$

对于固定的 $k\in N$, x^k 称之为问题 (2.1) 的稳定点, 如果其满足

$$\nabla\theta^k(x^k)=0. \tag{2.2}$$

同样地, x^* 称之为问题 (1.8) 的稳定点, 如果其满足

$$\nabla\theta(x^*)=0. \tag{2.3}$$

现在我们介绍一些重要引理.

引理 2.1　给定 $\beta > \alpha > 0$, 对于所有的 $x \in R^n$ 和 $\omega \in \Omega$, 以下不等式成立

$$\|H_\alpha(x,\omega) - H_\beta(x,\omega)\| \leqslant (\alpha^{-1} - \beta^{-1})\|F(x,\omega)\|. \tag{2.4}$$

证　对于任意的常数 $\beta > \alpha > 0$, 由投影映射在非空凸集中的的非扩张性质, 有

$$\begin{aligned}\|H_\alpha(x,\omega) - H_\beta(x,\omega)\| &= \|\mathrm{Proj}_S(x - \alpha^{-1}F(x,\omega)) - \mathrm{Proj}_S(x - \beta^{-1}F(x,\omega))\| \\ &\leqslant \|(x - \alpha^{-1}F(x,\omega)) - (x - \beta^{-1}F(x,\omega))\| \\ &= (\alpha^{-1} - \beta^{-1})\|F(x,\omega)\|, \quad \forall x \in R^n, \quad \omega \in \Omega.\end{aligned}$$

引理得证.

引理 2.2　(见 [5, 引理 2.1])　如果存在 $\overline{\omega} \in \Omega$, 使得 $M(\overline{\omega})$ 为 R_0 矩阵, 则存在闭球体 $B(\overline{\omega}, \delta) := \{\omega \mid \|\omega - \overline{\omega}\| \leqslant \delta\}$, 其中 $\delta > 0$, 使对任意的 $\omega \in \overline{B} := B(\overline{\omega}, \delta) \cap \Omega$, $M(\omega)$ 为 R_0 矩阵.

引理 2.3　给定 $\beta > \alpha > 0$, 对于所有的 $x \in R^n$ 和 $\omega \in \Omega$, 以下不等式成立:

$$\frac{\beta - \alpha}{2}\|x - H_\beta(x,\omega)\|^2 \leqslant g_{\alpha\beta}(x,\omega) \leqslant \frac{\beta - \alpha}{2}\|x - H_\alpha(x,\omega)\|^2. \tag{2.5}$$

证　由文 [1] 的定理 10.3.2 知左端不等式成立. 现证右端不等式成立.
由 D-间隙函数定义, 对任意 $x \in R^n$ 及 $\omega \in \Omega$, 有

$$\begin{aligned}g_{\alpha\beta}(x,\omega) &= g_\alpha(x,\omega) - g_\beta(x,\omega) \\ &= \max_{y \in S}\left\{(x-y)^{\mathrm{T}}F(x,\omega) - \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2\right\} \\ &\quad - \max_{y \in S}\left\{(x-y)^{\mathrm{T}}F(x,\omega) - \frac{\beta}{2}\|x-y\|^2\right\} \\ &\leqslant (x - H_\alpha(x,\omega))^{\mathrm{T}}F(x,\omega) - \frac{\alpha}{2}\|x - H_\alpha(x,\omega)\|^2 \\ &\quad - \left[(x - H_\alpha(x,\omega))^{\mathrm{T}}F(x,\omega) - \frac{\beta}{2}\|x - H_\alpha(x,\omega)\|^2\right] \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2}\|x - H_\alpha(x,\omega)\|^2.\end{aligned}$$

引理得证.

引理 2.4[17−18]　若 $\phi : \Omega \to R$ 在 Ω 上是可积的, 则有

$$\lim_{k \to \infty}\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i \in \Omega_k}\phi(\omega^i)\rho(\omega^i) = E[\phi(\omega)].$$

3　解的存在性及收敛性分析

现在, 我们关注问题 (1.8), 首先我们给出函数 θ 的可微性质.

定理 3.1　函数 $g_{\alpha\beta}$ 及 θ 都是可微函数, 更具体地, 对于任意的 $x \in R^n$, 有

$$\nabla\theta(x) = E[\nabla_x g_{\alpha\beta}(x,\omega)]. \tag{3.1}$$

证　F 关于 x 连续可微, 由 (1.7) 式, 有

$$\nabla_x g_{\alpha\beta}(x,\omega) = \nabla_x F(x,\omega)(H_\beta(x,\omega) - H_\alpha(x,\omega)) + \alpha(H_\alpha(x,\omega) - x) - \beta(H_\beta(x,\omega) - x).$$

对于任意的 $\gamma > 0$, 由 (1.6) 式, 有

$$\|x - H_\gamma(x,\omega)\| \leqslant \|x\| + \gamma^{-1}\|F(x,\omega)\|, \tag{3.2}$$

由 (3.2) 式及引理 2.1, 对于任意固定的 $x \in R^n$, 有

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x g_{\alpha\beta}(x,\omega)\| &\leqslant \|\nabla_x F(x,\omega)\| \ \|H_\beta(x,\omega) - H_\alpha(x,\omega)\| \\
&\quad + \alpha\|H_\alpha(x,\omega) - x\| + \beta\|H_\beta(x,\omega) - x\| \qquad (3.3)\\
&\leqslant (\alpha^{-1} - \beta^{-1})\|\nabla_x F(x,\omega)\| \ \|F(x,\omega)\| + 2\|F(x,\omega)\| + (\alpha+\beta)\|x\| \\
&\leqslant (\alpha^{-1} - \beta^{-1})\|M(\omega)\| \ (\|M(\omega)\| \ \|x\| + \|q(\omega)\|) + 2(\|M(\omega)\| \ \|x\| + \|q(\omega)\|) \\
&\quad + (\alpha+\beta)\|x\| \\
&\leqslant (\alpha^{-1} - \beta^{-1})(\|x\|+1)(\|M(\omega)\| + \|q(\omega)\|)^2 \\
&\quad + 2(\|x\|+1)(\|M(\omega)\| + \|q(\omega)\|) \qquad (3.4)\\
&\quad + (\alpha+\beta)\|x\|. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

由 (1.9)–(1.11) 式以及文 [19] 中的定理 16.8, 函数 θ 可微, 且 (3.1) 式成立.

接下来, 我们提出水平集有界的一个充分条件.

定理 3.2 假设存在 $\overline{\omega} \in \Omega$, 使得 $\rho(\overline{\omega}) > 0$ 且 $M(\overline{\omega})$ 为 R_0 矩阵, 则对任意的 $c \geqslant 0$, 水平集 $L_\theta(c)$ 有界.

证 由 ρ 的连续性及引理 2.2, 存在一闭球体 $B(\overline{\omega},\delta)$ 和一常数 $\rho_0 > 0$, 其中 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $\omega \in \overline{B} := B(\overline{\omega},\delta) \cap \Omega$, $M(\omega)$ 为 R_0 矩阵且 $\rho(\omega) > \rho_0$. 现在考虑一序列 $\{x^k\} \subset R^n$, 由 $M(\cdot)$, $q(\cdot)$ 以及 $g_{\alpha\beta}(x,\cdot)$ 的连续性, 对于每个 k, 均存在 $\omega^k \in \overline{B}$, 使得

$$g_{\alpha\beta}(x^k,\omega^k) = \min_{\omega\in\overline{B}} \ g_{\alpha\beta}(x^k,\omega).$$

由引理 2.3, 有

$$\begin{aligned}
\theta(x^k) &\geqslant \int_{\overline{B}} g_{\alpha\beta}(x^k,\omega)\rho(\omega)\mathrm{d}\omega \\
&\geqslant g_{\alpha\beta}(x^k,\omega^k)\rho_0 \int_{\overline{B}} \mathrm{d}\omega \\
&\geqslant \frac{C\rho_0(\beta-\alpha)}{2}\|x^k - H_\beta(x^k,\omega^k)\|^2,
\end{aligned}$$

其中 $C = \int_{\overline{B}} \mathrm{d}\omega > 0$. 现只需证当 $\|x^k\| \to +\infty$ 时, $\|x^k - H_\beta(x^k,\omega^k)\| \to +\infty$. 记得对于每个 $i = 1,\cdots,n$, 有 $(x^k - H_\beta(x^k,\omega^k))_i = \min\{x_i^k, \beta^{-1}(M(\omega^k)x^k + q(\omega^k))_i\}$. 现假设 $\|x^k\| \to +\infty$, 不难看出, 若存在某个 i, 使得 $x_i^k \to -\infty$ 或 $(M(\omega^k)x^k + q(\omega^k))_i \to -\infty$, 则有 $|(x^k - H_\beta(x^k,\omega^k))_i| \to +\infty$, 从而 $\|x^k - H_\beta(x^k,\omega^k)\| \to +\infty$, 结论成立. 于是, 我们现只考虑对于任意的 i, $\{x_i^k\}$ 和 $\{(M(\omega^k)x^k + q(\omega^k))_i\}$ 均为下有界的情况. 用 $\|x^k\|$ 除以序列中的每个元素, 并取极限, 得到

$$(M(\widehat{\omega})\widehat{v})_i \geqslant 0, \quad \widehat{v}_i \geqslant 0, \quad i = 1,\cdots,n,$$

其中 $\widehat{\omega}$ 和 $\widehat{v}$ 分别为 $\{\omega^k\}$ 和 $\{\frac{x^k}{\|x^k\|}\}$ 的聚点, 注意到 $\widehat{\omega} \in \overline{B}$ 以及 $\|\widehat{v}\| = 1$. 由于 $M(\widehat{\omega})$ 为 R_0 矩阵且 $\widehat{v} \neq 0$, 则必存在某个 i, 使得 $(M(\widehat{\omega})\widehat{v})_i > 0$ 且 $\widehat{v}_i > 0$. 这意味着 $(M(\omega^k)x^k + q(\omega^k))_i \to +\infty$ 且 $x_i^k \to +\infty$, 因此 $\|x^k - H_\beta(x^k,\omega^k)\| \to +\infty$, 定理得证.

注 3.1　定理 3.2 意味着问题 (1.8) 的最优解集非空且有界, 这使得接下来的研究具有意义.

接下来, 我们考虑离散近似问题 (2.1). 首先, 通过适当的函数变换 $\omega = u(\widetilde{\omega})$, 我们把在 Ω 上的积分转化到单位球 $[0,1]^m \subseteq R^m$ 上来, 并在单位球上获得样本观察值 $\{\widetilde{\omega}, i = 1, \cdots, N)$, 则函数 $\theta(x)$ 可写成

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \int_{\Omega} g_{\alpha\beta}(x,\omega)\rho(\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= \int_{[0,1]^m} g_{\alpha\beta}(x,u(\widetilde{\omega}))\rho(u(\widetilde{\omega}))u'(\widetilde{\omega})\mathrm{d}\widetilde{\omega} \\ &= \int_{[0,1]^m} g_{\alpha\beta}(x,u(\widetilde{\omega}))\widetilde{\rho}(\widetilde{\omega})\mathrm{d}\widetilde{\omega},\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{\rho}(\widetilde{\omega}) = \rho(u(\widetilde{\omega}))u'(\widetilde{\omega})$. 为了简化记号, 在不致混淆的情况下, 在下文中我们假设 $\Omega = [0,1]^m$, 且用 ω 代替 $\widetilde{\omega}$.

现分别用 S^* 和 S_k^* 来表示问题 (1.8) 和问题 (2.1) 的最优解集, 我们首先来研究 θ^k 的极限.

定理 3.3　对于任意给定的 $x \in R^n$, 成立 $\theta(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \theta^k(x)$.

证　对于任意的 $x \in R^n$, 由于 $g_\gamma(x,\cdot)$ $(\gamma = \alpha, \beta)$ 和 $\rho(\cdot)$ 均在 Ω 上可积, 且 $g_{\alpha\beta}(x,\cdot) = g_\alpha(x,\cdot) - g_\beta(x,\cdot)$, 故 $g_{\alpha\beta}(x,\cdot)$ 亦在 Ω 上可积, 从而由引理 2.4 证得上式成立.

定理 3.4　假设存在 $\overline{\omega} \in \Omega$, 使得 $\rho(\overline{\omega}) > 0$ 且 $M(\overline{\omega})$ 为 R_0 矩阵, 则存在整数 $k_0 > 0$, 使得对每个 $k \geqslant k_0$, 对于任意的 $c \geqslant 0$, 水平集 $L_{\theta^k}(c)$ 有界. 即对每一个足够大的 k, 最优解集 S_k^* 非空且有界.

证　由引理 2.2, 存在足够大的 $k_0 > 0$ 及闭球 $B(\overline{\omega}, \delta) := \{\omega \mid \|\omega - \overline{\omega}\|\}$, 其中 $\delta > 0$, 使得对于所有的 $k \geqslant k_0$, $B(\overline{\omega}, \delta) \cap \Omega_K$ 非空且对任意的 $\omega \in B(\overline{\omega}, \delta) \cap \Omega_K$, $M(\omega)$ 是 R_0 矩阵. 于是, 运用证明定理 3.2 同样的方法可证明该定理, 不再赘述.

以下定理说明了当样本规模不断增大时, 问题 (2.1) 的最优解收敛于问题 (1.3) 的最优解集.

定理 3.5　假设存在 $\overline{\omega} \in \Omega$, 使得 $\rho(\overline{\omega}) > 0$ 且 $M(\overline{\omega})$ 为 R_0 矩阵. 对于每个 k, 设 $x^k \in S_k^*$, 则序列 $\{x^k\}$ 的每一个聚点均收敛于 S^*.

证　设 x^* 为 $\{x^k\}$ 的聚点, 不失一般性, 假设 $\{x^k\}$ 自身收敛于 x^*, 现证 $\lim\limits_{k\to\infty} \theta^k(x^k) = \theta(x^*)$. 由微分中值定理, 对于任意的 $\omega \in \Omega$ 及 k, 有

$$\begin{aligned}|g_{\alpha\beta}(x^k,\omega) - g_{\alpha\beta}(x^*,\omega)| &= |\nabla_x g_{\alpha\beta}(y^k,\omega)^{\mathrm{T}}(x^k - x^*)| \\ &\leqslant \|\nabla_x g_{\alpha\beta}(y^k,\omega)\|\,\|x^k - x^*\|,\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 y^k 在 x^k 与 x^* 之间, 显然 $\lim\limits_{k\to\infty} y^k = x^*$. 于是

$$\begin{aligned}|\theta^k(x^k) - \theta^k(x^*)| &= \Big|\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k} g_{\alpha\beta}(x^k,\omega^i)\rho(\omega^i) - \frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k} g_{\alpha\beta}(x^*,\omega^i)\rho(\omega^i)\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k} |g_{\alpha\beta}(x^k,\omega^i) - g_{\alpha\beta}(x^*,\omega^i)|\rho(\omega^i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \|x^k - x^*\|\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\|\nabla_x g_{\alpha\beta}(y^k,\omega^i)\|\rho(\omega^i)\\
&\leqslant (\alpha^{-1}-\beta^{-1})(\|y^k\|+1)\|x^k-x^*\|\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}(\|M(\omega^i)\|+\|q(\omega^i)\|)^2\rho(\omega^i)\\
&\quad +2(\|y^k\|+1)\|x^k-x^*\|\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}(\|M(\omega^i)\|+\|q(\omega^i)\|)\rho(\omega^i)\\
&\quad +(\alpha+\beta)\|y^k\|\ \|x^k-x^*\|\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\rho(\omega^i),
\end{aligned}$$

其中第二个不等式源于 (3.6) 式, 第三个不等式源于 (3.3) 式. 令 $k\to+\infty$, 由 (1.9)–(1.11) 式以及引理 2.4 可得上述不等式右端趋于零, 故

$$\lim_{k\to\infty}|\theta^k(x^k)-\theta^k(x^*)|=0.$$

而

$$|\theta^k(x^k)-\theta(x^*)|\leqslant|\theta^k(x^k)-\theta^k(x^*)|+|\theta^k(x^*)-\theta(x^*)|,$$

由定理 3.3, 有

$$\lim_{k\to\infty}\theta^k(x^k)=\theta(x^*).$$

由于对于每个 k, $x^k\in S_k^*$, 即对任意的 $x\in R^n$, 有

$$\theta^k(x^k)\leqslant\theta^k(x).$$

令 $k\to+\infty$, 有 $\theta(x^*)\leqslant\theta(x)$, $\quad\forall x\in R^n$, 这意味着 $x^*\in S^*$, 定理得证.

定理 3.5 研究了问题 (2.1) 的最优解的收敛性, 然而, 在具体计算过程中, 往往更容易得到稳定点, 接下来, 我们来研究问题 (2.1) 稳定点的收敛性.

定理 3.6 对每个 k, 设 x^k 为问题 (2.1) 的稳定点, x^* 为序列 $\{x^k\}$ 的聚点, 则 x^* 为问题 (1.8) 的稳定点.

证 不失一般性, 假设序列 $\{x^k\}$ 收敛到 x^*, 首先证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\nabla\theta^k(x^k)=\nabla\theta(x^*)$. 由投影映射在非空凸集上的非扩张性, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\rho(\omega^i)\|H_\gamma(x^k,\omega^i)-H_\gamma(x^*,\omega^i)\|\\
\leqslant&\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\rho(\omega^i)\|(x^k-\gamma^{-1}F(x^k,\omega^i))-(x^*-\gamma^{-1}F(x^*,\omega^i))\|\\
\leqslant&\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\rho(\omega^i)(1+\gamma^{-1}\|M(\omega^i)\|)\|x^k-x^*\|\\
\xrightarrow{k\to+\infty}&\quad 0,
\end{aligned}\tag{3.7}$$

其中常数 $\gamma>0$. 进一步

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\rho(\omega^i)\|\nabla_xF(x^k,\omega^i)H_\gamma(x^k,\omega^i)-\nabla_xF(x^*,\omega^i)H_\gamma(x^*,\omega^i)\|\\
\leqslant&\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\rho(\omega^i)\|M(\omega^i\|\ \|H_\gamma(x^k,\omega^i)-H_\gamma(x^*,\omega^i)\|
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{k\to+\infty} \quad 0. \tag{3.8}$$

由 (1.7) 式, (3.7)–(3.8) 式, 有

$$\begin{aligned}
\|\nabla\theta^k(x^k)-\nabla\theta^k(x^*)\| &= \frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\rho(\omega^i)(\nabla_x g_{\alpha\beta}(x^k,\omega^i)-\nabla_x g_{\alpha\beta}(x^*,\omega^i))\\
&\leqslant \frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\rho(\omega^i)\|\nabla_x F(x^k,\omega^i)H_\beta(x^k,\omega^i)-\nabla_x F(x^*,\omega^i)H_\beta(x^*,\omega^i)\|\\
&\quad+\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\rho(\omega^i)\|\nabla_x F(x^k,\omega^i)H_\alpha(x^k,\omega^i)-\nabla_x F(x^*,\omega^i)H_\alpha(x^*,\omega^i)\|\\
&\quad+\frac{\alpha}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\rho(\omega^i)\|H_\alpha(x^k,\omega^i)-H_\alpha(x^*,\omega^i)\|\\
&\quad+\frac{\beta}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\rho(\omega^i)\|H_\beta(x^k,\omega^i)-H_\beta(x^*,\omega^i)\|\\
&\quad+(\alpha+\beta)\|x^k-x^*\|\\
&\xrightarrow{k\to+\infty} 0.
\end{aligned}$$

由引理 2.4 及定理 3.1 知 $\lim\limits_{k\to+\infty}\nabla\theta^k(x^*)=\theta(x^*)$. 因此

$$\|\nabla\theta^k(x^k)-\nabla\theta(x^*)\|\leqslant\|\nabla\theta^k(x^k)-\nabla\theta^k(x^*)\|+\|\nabla\theta^k(x^*)-\nabla\theta(x^*)\|\xrightarrow{k\to+\infty}0.$$

对 (2.2) 式两端取极限, 得到 (2.3) 式. 即 x^* 为问题 (1.8) 的稳定点.

4　一类带有常系数矩阵的随机互补线性问题

在本节中, 我们假定 $M(\omega)\equiv M$ 以及 $q(\omega)\equiv T\omega+\overline{q}$, 其中 $M\in R^{n\times n}$, $T\in R^{n\times m}$ 且 $\overline{q}\in R^n$ 为给定常向量.

以下定理说明了在 $q(\omega)$ 为 ω 的线性函数的条件下, 定理 3.2 中的条件为水平集有界的充要条件.

定理 4.1　假设 $M(\omega)\equiv M$, $q(\omega)$ 为 ω 的线性函数. 如果 M 为非 R_0 矩阵, 则存在常数 $c>0$, 使得水平集 $L_\theta(c)$ 是无界的.

证　由于 M 为非 R_0 矩阵, 故存在 $x\neq0$, 满足

$$x\geqslant0,\quad Mx\geqslant0,\quad x^{\mathrm T}Mx=0,$$

这意味着对每个 i, 要么 $x_i=0$, 要么 $(Mx)_i=0$. 于是

$$\min\{x_i,\alpha^{-1}(Mx+q(\omega))_i\}=\begin{cases}0, & x_i=0,\ (Mx+q(\omega))_i\geqslant0,\\ \alpha^{-1}(Mx+q(\omega))_i, & x_i=0,\ (Mx+q(\omega))_i\leqslant0,\\ x_i, & (Mx)_i=0,\ \alpha^{-1}q_i(\omega)\geqslant x_i,\\ \alpha^{-1}q_i(\omega), & (Mx)_i=0,\ \alpha^{-1}q_i(\omega)\leqslant x_i.\end{cases}$$

由于 $Mx\geqslant0$, 故当 $(Mx+q(\omega))_i\leqslant0$ 时, 有 $|(Mx+q(\omega))_i|\leqslant|q_i(\omega)|$. 注意到

$$|(x-H_\alpha(x,\omega))_i|=|\min\{x_i,\alpha^{-1}(Mx+q(\omega))_i\}|\leqslant\alpha^{-1}|q_i(\omega)|.$$

于是由引理 2.3, 得到

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \int_\Omega g_{\alpha\beta}(x,\omega)\rho(\omega)\mathrm{d}\omega \\ &\leqslant \frac{\beta-\alpha}{2}\int_\Omega \|x-H_\alpha(x,\omega)\|^2\rho(\omega)\mathrm{d}\omega \\ &\leqslant \frac{\beta-\alpha}{2\alpha}\int_\Omega \|q(\omega)\|^2\rho(\omega)\mathrm{d}\omega =: \gamma.\end{aligned}$$

由 (1.10) 式可知, $\gamma<\infty$. 又 $q(\omega)$ 为 ω 的线性函数, 故对任意的 $\lambda>0$, 上述讨论对 λx 同样成立, 即 $\theta(\lambda x)\leqslant\gamma$, 这意味着 $L_\theta(\gamma)$ 无界, 定理得证.

现在, 我们对离散近似问题的水平集有界的充要条件进行分析.

定理 4.2 假设 $M(\omega)\equiv M$, $q(\omega)$ 为 ω 的线性函数, 即 $q(\omega)\equiv T\omega+\overline{q}$, 其中 $T\in R^{n\times m}$, $\overline{q}\in R^n$, 则有:

(i) 如果 M 为 R_0 矩阵, 则对任意的 T 和 $\overline{q}$, 离散近似问题的最优解集 S_k^* 非空且有界. 对每个 k 设 $x^k\in S_k^*$, 则序列 $\{x^k\}$ 的聚点是问题 (1.8) 的最优解 ;

(ii) 如果 M 为非 R_0 矩阵, 则存在 T 和 $\overline{q}$, 使得对所有的 k, 离散近似问题最优解集 S_k^* 无界.

证 命题 (i) 可直接由定理 3.4 和定理 3.5 推论得出. 现证命题 (ii), 设 $x\neq 0$ 满足

$$x\geqslant 0,\quad Mx\geqslant 0,\quad x^{\mathrm{T}}Mx=0,$$

并选取 T 和 $\overline{q}$, 使得下式成立:

$$x_i=0 \quad\Longrightarrow\quad q_i(\omega)\geqslant 0,\quad \forall\,\omega\in\Omega,$$

$$x_i>0 \quad\Longrightarrow\quad q_i(\omega)\equiv 0,\quad \forall\,\omega\in\Omega,$$

则由引理 2.3 可得

$$g_{\alpha\beta}(\lambda x,\omega)\leqslant\frac{\beta-\alpha}{2}\|\lambda x-H_\alpha(\lambda x,\omega)\|^2=\frac{\beta-\alpha}{2}\|\min\{\lambda x,\alpha^{-1}(\lambda Mx+q(\omega))\}\|^2=0$$

对所有的 $\omega\in\Omega$ 和 $\lambda>0$ 成立, 故 $\theta^k(\lambda x)=0$, 即对所有的 $\lambda>0$, $\lambda x\in S_k^*$ 成立, 这意味着对所有的 k, S_k^* 无界, 定理得证.

5 本章小结

在本章中, 我们对随机线性互补问题提出了无约束优化再定式模型, 并对其性质进行了研究分析. 通过拟 Monte Carlo 方法, 我们得到了无约束期望残差极小化问题的离散近似问题, 并讨论了最优解的存在性及收敛性. 另外, 针对一类带有常系数矩阵的随机线性互补问题, 我们提出了最优解集有界的充要条件. 在本章中, 通篇运用的 Euclid 范数可被推广为更一般的由对称正定矩阵所定义的范数. 在后续研究中, 由 D-间隙函数引出的无约束优化再定式模型能否应用于更一般的变分不等式, 相信这是一个有意思的研究课题, 等待更多读者挖掘.

参 考 文 献

[1] Facchinei F, Pang J S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems [J]. New York: Springer-Verlag, 2003.

[2] Dafermos S. An iterative scheme for variational inequalities [J]. *Mathematical Programming*, 1983, 26:40–47.

[3] Pang J S, Chan D. Iterative methods for variational and complementarity problems [J]. *Mathematical Programming*, 1982, 24:284–313.

[4] Gürkan G, Özge A Y, Robinson S M. Sample-path solution of stochastic variational inequalities [J]. *Mathematical Programming*, 1999, 84:313–333.

[5] Chen X, Fukushima M. Expected residual minimization method for stochastic linear complementarity problems [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2005, 30:1022–1038.

[6] Luo M J, Lin G H. Expected residual minimization method for stochastic variational inequality problems [J]. *Journal of Optimization Theory and Application*, 2009, 140:103–116.

[7] Ma H Q, Wu M, Huang N J, et al. Expected residual minimization method for stochastic variational inequality problems with nonlinear perturbations [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219:6256–6267.

[8] Lu F, Li S J. Method of weighted expected residual for solving stochastic variational inequality problems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 269:651–663.

[9] Wang M Z, Lin G H, Yao Y L, et al. Sample eaverage approximation methods for a class of stochastic variational inequality problems [J]. *J of Systems Science and Mathematical Sciences,* 24:1143–1153.

[10] Luo M J, Lin G H. Convergence results of the ERM method for nonlinear stochastic variational inequality problems [J]. *Journal of Optimization Theory and Application*, 2009, 142:569–581.

[11] Lin G H, Fukushima M. New reformulations for stochastic nonlinear complementarity peoblems [J]. *Optimization Methods and Software*, 2006, 21:551–564.

[12] Chen X, Lin G H. CVaR-based formulation andapproximation method for stochastic variational inequalities [J]. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2011, 1:35–48.

[13] Lu F, Li S J. Convergence analysis of weighted expected residual method for nonlinear stochastic variational inequality problems [J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2015, 82:229–242.

[14] Yamashita N, Taji K, Fukushima M. Unconstrained optimization reformulations of variational inequality problems [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1997, 92:439–456.

[15] Fukushima M. Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems [J]. *Mathematical Programming*, 1992, 53:99–110.

[16] Fukushima M. Merit functions for variational inequality and complementarity problems [J]. G Di Pillo, F Giannessi (eds.), *Nonlinear Optimization and Applications*, 1995:155–170.

[17] Niederreiter H. Random number generation and Quasi-Monte Carlo methods [M]. Philadelphia: SIAM, 1992.

[18] Birge J R. Quasi-Monte Carlo approaches to option pricing [J]. *Technical Report*, 94–19, Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, 1994 15 pages.

[19] Patrick B. Probability and measure [M]. New York: Wiley, 1995.

Unconstrained Optimization Reformulation of Stochastic Linear Complementary Problems

WU Xueqian[1] LI Shengjie[1]

[1]College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China. E-mail: xueqianwu1992@163.com; lisj@cqu.edu.cn

Abstract In this paper, the authors present an unconstrained optimization reformulation (UERM problem) for the stochastic linear complementary problem (SLCP), which is to minimize an expected residual defined by D-gap function. By the quasi-Monte Carlo method, the authors generate observations and obtain the discrete approximations of the UERM problem. Under some moderate assumptions, the authors establish a sufficient condition for the existence of solutions to the UERM problem and its discrete approximations. Furthermore, the authors analyze the convergence of optimal solutions and the limiting behaviour of stationary points of the approximation problems. For a class of SLCPs with a fixed coefficient matrix, a necessary and sufficient condition for the boundedness of the solution sets is discussed as well.

Keywords Stochastic linear complementary problem, UERM problem, Quasi-Monte Carlo method

2000 MR Subject Classification 90C15, 90C33

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 1, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA