数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(1):105–112
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0009

剩余有限 Minimax 可解群的 4 阶正则自同构*

徐 涛[1] 刘合国[2]

提要 设 G 是剩余有限 minimax 可解群, α 是 G 的 4 阶正则自同构, 则下面结果成立:

(1) 如果映射 $\varphi : G \longrightarrow G$ $(g \longmapsto [g,\alpha])$ 是满射, 那么 G 是中心子群被亚 Abel 群的扩张.

(2) $C_G(\alpha^2)$ 和 $[G,\ _{n-1}\alpha^2]/[G,\ _n\alpha^2](n \in \mathbb{Z}^+)$ 都是 Abel 群的有限扩张.

关键词 剩余有限, minimax 可解群, 正则自同构, 几乎正则自同构

MR (2000) 主题分类 20E36

中图法分类 O152

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2019)01-0105-08

1 引 言

本文采用的符号和术语都是标准的, 参见文 [1].

在群论里, 如果群 G 的自同构 α 没有非平凡的不动点, 则称 α 是正则自同构; 如果群 G 的自同构 α 有有限多个不动点, 则称 α 是几乎正则自同构.

对于 2 阶正则自同构, Burnside 在文 [2] 中证明了一个经典结果. 即如下命题.

命题 1.1 设 G 是有限群, α 是 G 的 2 阶正则自同构当且仅当 G 是奇阶 Abel 群.

需要指出的是, 在上述命题中, "有限群" 这个条件是必不可少的, 因为对于无限群, 命题 1.1 是不成立的. 例如, F 是由 $x,\ y$ 两个元素生成的自由群, 即 $F = \langle x,\ y\rangle$. 如下定义 α,

$$\alpha:\ F \longrightarrow F,$$

$$x \longmapsto y,$$

$$y \longmapsto x.$$

不难验证 α 是 F 的 2 阶正则自同构, 但 F 不是 Abel 群.

对于 3 阶正则自同构, Gorenstein 在文 [3] 中给出了具有 3 阶正则自同构的有限群是幂零群. 在文 [4] 中, Neumann 把文 [3] 中的有限群推广到任意群, 得到了下面的结果.

命题 1.2 设 G 是一个群, α 是 G 的 3 阶正则自同构且 $\varphi : G \longrightarrow G$ $(g \longmapsto [g,\alpha])$ 是满射, 则 G 是幂零类不超过 2 的幂零群.

对于素数阶正则自同构, Thompson[5]证明了有限群论里的一个著名结果: 如果有限群 G 有一个素数阶的正则自同构, 那么 G 是幂零群. 在无限群中, Higman[6]用 Lie 环的方法证明了: 如果局部幂零群 G 有一个素数 p 阶的正则自同构, 那么 G 是幂零类不超过

本文 2015 年 10 月 7 日收到, 2017 年 2 月 25 日收到修改稿.

[1]河北工程大学数理学院, 邯郸 056038. E-mail: gtxutao@163.com

[2]湖北大学数学与统计学院, 武汉 430062. E-mail: ghliu@hubu.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11771129, No. 11626078), 河北省高等学校青年拔尖人才计划项目, 湖北省高等学校优秀中青年科技创新团队计划 (No. T201601), 湖北省新世纪高层次人才工程专项基金和邯郸市科学技术研究与发展计划项目 (No. 1723208068-5) 的资助.

$h(p)$ 的幂零群, 其中 $h(p)$ 是只与 p 有关的函数. 在文 [7] 中, 我们推广了 Higman 的结果, 用纯群论的方法证明了下面的结论.

命题 1.3 设 G 是剩余有限的可解群或是剩余有限的可解群的有限扩张, α 是 G 的素数 p 阶正则自同构且 $\varphi: G \longrightarrow G$ $(g \longmapsto [g,\alpha])$ 是满射, 那么 G 是幂零类不超过 $h(p)$ 的幂零群, 其中 $h(p)$ 是只与 p 有关的函数.

对于 4 阶正则自同构, Gorenstein 和 Herstein 在文 [8] 中证明了: 如果有限群 G 有一个 4 阶的正则自同构, 那么 G 是可解群. 更广地, Kovács 在文 [9] 中给出了下面命题.

命题 1.4 设 G 是局部有限群, α 是 G 的 4 阶正则自同构, 则 $G'' \leqslant \zeta G$.

如果群 G 有一个有限长的次正规群列, 其因子要么满足极小条件要么满足极大条件, 那么称 G 为 minimax 群[1]. 在本文中, 我们研究了剩余有限 minimax 可解群的 4 阶正则自同构, 得到了下面两个定理. 推广了 Neumann 和 Kovács 的上述结果.

定理 1.1 设 G 是剩余有限 minimax 可解群, α 是 G 的 4 阶正则自同构且 $\varphi: G \longrightarrow G$ $(g \longmapsto [g,\alpha])$ 是满射, 则 G 是中心子群被亚 Abel 群的扩张.

进一步地, 对剩余有限 minimax 可解群的有限扩张, 我们证明了类似的结果.

定理 1.2 设 G 是剩余有限 minimax 可解群的有限扩张, α 是 G 的 4 阶正则自同构且 $\varphi: G \longrightarrow G$ $(g \longmapsto [g,\alpha])$ 是满射, 则 G 是中心子群被亚 Abel 群的扩张.

如果 α 是群 G 的 4 阶正则自同构, 那么 α^2 是 G 的 2 阶自同构. 但是 α^2 不一定是正则的, 那么子群 $C_G(\alpha^2)$ 的结构是怎样的? 在本文里, 我们讨论了当 G 是剩余有限 minimax 可解群时, 子群 $C_G(\alpha^2)$ 的结构, 得到了下面的定理.

定理 1.3 设 G 是剩余有限 minimax 可解群, α 是 G 的 4 阶正则自同构, 则 $C_G(\alpha^2)$ 是 Abel 群的有限扩张.

众所周知, (几乎) 正则自同构 α 的换位子群 $[G,\ \alpha] = \langle\ g^{-1}g^{\alpha} \mid g \in G\ \rangle$ 是群 G 的正规子群, 考虑 (几乎) 正则自同构 α 对商群 $G/[G,\ \alpha]$ 的影响, 也是值得关注的问题. 对于几乎正则自同构, Endimioni 和 Moravec 在文 [10] 中证明了: 如果 α 是多重循环群 G 的一个几乎正则自同构, 则 $G/[G,\ \alpha]$ 是有限群. 在文 [11] 中, 我们推广了上述结果, 证明了

命题 1.5 设 G 是剩余有限 minimax 可解群, α 是 G 的几乎正则自同构, 则 $G/[G,\ \alpha]$ 是有限群.

当 α 是 4 阶正则自同构时, 我们研究了剩余有限 minimax 可解群 G 的商群 $[G,\ {}_{n-1}\alpha^2]/[G,\ {}_{n}\alpha^2]$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 的结构, 得到了下面的定理.

定理 1.4 设 G 是剩余有限 minimax 可解群, α 是 G 的 4 阶正则自同构, 则 $[G,\ {}_{n-1}\alpha^2]/[G,\ {}_{n}\alpha^2]$ 是 Abel 群的有限扩张, 其中 $n \in \mathbb{Z}^+$.

2 定理 1.1 和 1.2 的证明

引理 2.1 设 G 是有限群, α 是 G 的自同构. α 是正则自同构当且仅当 $\varphi: G \longrightarrow G$ $(g \longmapsto [g,\alpha])$ 是满射.

证 充分性. 对有限群 G, 如果 $\varphi: G \longrightarrow G$ $(g \longmapsto [g,\alpha])$ 是满射, 那么 φ 是单射. 取 $x \in G$, 设 $x^{\alpha} = x$, 则 $x^{\varphi} = [x,\alpha] = x^{-1}x^{\alpha} = 1$. 此时必须 $x = 1$. 于是 α 是正则自同构.

必要性. 任取 $g_1, g_2 \in G$, 设 $[g_1, \alpha] = [g_2, \alpha]$, 则

$$(g_1 g_2^{-1})^\alpha = g_1^\alpha (g_2^{-1})^\alpha = g_1 g_2^{-1}.$$

因为 α 是正则自同构, 所以 $g_1 g_2^{-1} = 1$, 即 $g_1 = g_2$. 从而 φ 是单射. 注意到 G 是有限群, 因此 φ 是满射.

引理 2.2 设 G 是一个群, H 是 G 的指数有限的特征子群, α 是 G 的正则自同构且 $\varphi : G \longrightarrow G$ $(g \longmapsto [g, \alpha])$ 是满射, 则 α 诱导了 G/H 的正则自同构.

证 因为 $\varphi : G \longrightarrow G$ $(g \longmapsto [g, \alpha])$ 是满射, 所以 $\overline{\varphi} : G/H \longrightarrow G/H$ $(gH \longmapsto [gH, \alpha])$ 也是满射. 由引理 2.1 知, α 诱导了 G/H 的正则自同构.

引理 2.3 设 G 是一个群, α 是 G 的 2 阶正则自同构且 $\varphi : G \longrightarrow G$ $(g \longmapsto [g, \alpha])$ 是满射, 则 G 是 Abel 群.

证 因为 $\varphi : G \longrightarrow G$ $(g \longmapsto [g, \alpha])$ 是满射, 所以任取 $x \in G$, 存在某个 $g \in G$, 使得 $x = [g, \alpha] = g^{-1} g^\alpha$. 故

$$x^\alpha = (g^{-1} g^\alpha)^\alpha = (g^{-1})^\alpha g^{\alpha^2} = (g^\alpha)^{-1} g = x^{-1}.$$

于是对于任意的 g_1, $g_2 \in G$, 有

$$(g_1^{-1} g_2^{-1})^\alpha = (g_1^{-1} g_2^{-1})^{-1} = g_2 g_1$$

和

$$(g_1^{-1} g_2^{-1})^\alpha = (g_1^{-1})^\alpha (g_2^{-1})^\alpha = g_1 g_2,$$

因此 $g_1 g_2 = g_2 g_1$. G 是 Abel 群.

定理 1.1 的证明 因为 G 是剩余有限 minimax 可解群, 所以任取 $1 \neq g \in G$, 存在 $g \overline{\in} N_g \lhd G$, 使得 G/N_g 是有限群且

$$\bigcap_g N_g = 1.$$

不妨设 $|G : N_g| = n$, 则 $g \overline{\in} G^n \leqslant N_g$. 于是

$$\bigcap_n G^n \leqslant \bigcap_g N_g = 1.$$

注意到 G/G^n 是幂指数有限的有限秩的群, 因此 G/G^n 是有限群. 由引理 2.2 知 α 诱导了 G/G^n 的正则自同构 $\overline{\alpha}$. 明显地, $\overline{\alpha}$ 的阶数整除 4, 因此如果 $\overline{\alpha}^2 = 1$, 则根据引理 2.3 可得 G/G^n 是 Abel 群, 从而任取 $\overline{g}_1, \overline{g}_2 \in G/G^n$, 有 $[\overline{g}_1, \overline{g}_2] = 1$, 即 $[g_1, g_2] \in G^n$. 所以 $[g_1, g_2] \in \bigcap_n G^n = 1$. 这说明 G 是 Abel 群, 结论显然成立. 如果 $\overline{\alpha}^4 = 1$, 由命题 1.4 知 $(G/G^n)'' \leqslant \zeta(G/G^n)$. 从而

$$[(G/G^n)'', \ G/G^n] = 1,$$

即

$$[G'' G^n, \ G] \leqslant G^n,$$

进而

$$[G'', \ G] \leqslant [G'' G^n, \ G] \leqslant G^n,$$

因此

$$[G'', \ G] \leqslant \bigcap_n G^n = 1.$$

所以 $G'' \leqslant \zeta G$. 注意到 $G/\zeta G \leqslant G/G''$ 是亚 Abel 群, 于是 G 是中心子群被亚 Abel 群的扩张.

定理 1.2 的证明 我们知道 G 存在一个指数有限的正规子群 N, 使得 N 是剩余有限 minimax 可解群. 不妨设 G/N 的幂指数是 m, 则 G^m char G 且 $G^m \leqslant N$ 是剩余有限 minimax 可解群. 由文 [13, 引理 1.44] 知 G 是有限秩的群, 于是 G/G^m 是幂指数有限的有限秩的群, 从而 G/G^m 是有限群. 记 $H = G^m$, 则 G 有一个指数有限的特征子群 H, 使得 H 是剩余有限 minimax 可解群. 任取 $1 \neq h \in H$, 存在 $h \overline{\in} H_h \lhd H$, 使得 H/H_h 是有限群且

$$\bigcap_h H_h = 1.$$

设 $|H : H_h| = n$, 则 H^n char H 且 $H^n \leqslant H_h$. 于是

$$\bigcap_n H^n \leqslant \bigcap_h H_h = 1.$$

又 H/H^n 是幂指数有限的有限秩的群, 故 H/H^n 是有限群. 所以

$$|G : H^n| = |G : H||H : H^n| < \infty.$$

注意到 H^n char H, H char G, 根据引理 2.2 知, α 诱导了 G/H^n 的正则自同构 $\overline{\alpha}$. 易知 $\overline{\alpha}$ 的阶数整除 4, 因此如果 $\overline{\alpha}^2 = 1$, 根据引理 2.3 可得 G/H^n 是 Abel 群, 从而任取 $\overline{g}_1, \overline{g}_2 \in G/H^n$, 有 $[\overline{g}_1, \overline{g}_2] = 1$, 即 $[g_1, g_2] \in H^n$. 进而 $[g_1, g_2] \in \bigcap\limits_n H^n = 1$. 这说明 G 是 Abel 群, 结论显然成立. 如果 $\overline{\alpha}^4 = 1$, 由命题 1.4 知, $(G/H^n)'' \leqslant \zeta(G/H^n)$. 从而

$$[(G/H^n)'',\ G/H^n] = 1,$$

即

$$[G''H^n,\ G] \leqslant H^n,$$

进而

$$[G'',\ G] \leqslant [G''H^n,\ G] \leqslant H^n,$$

因此

$$[G'',\ G] \leqslant \bigcap_n H^n = 1,$$

所以 $G'' \leqslant \zeta G$. 又 $G/\zeta G \leqslant G/G''$ 是亚 Abel 群, 故 G 是中心子群被亚 Abel 群的扩张.

直接应用定理 1.1 和定理 1.2 可以得到下面的推论.

推论 2.1 设 G 是剩余有限 minimax 可解群或是剩余有限 minimax 可解群的有限扩张, g 是 G 的一个 4 阶元素且 g 在 G 中的中心化子是 1. 如果 $\varphi_g : G \longrightarrow G\ \ (h \longmapsto [h, g])$ 是满射, 则 G 是中心子群被亚 Abel 群的扩张.

3 定理 1.3 的证明

引理 3.1 设 α 是群 G 的正则自同构, H 是 G 的 α-不变有限正规子群, 则 α 诱导了 G/H 的正则自同构 $\overline{\alpha}$.

证 显然 α 诱导了 G/H 的自同构 $\overline{\alpha}$. 只需证 $C_{G/H}(\overline{\alpha}) = 1$ 即可. 记 $C/H = C_{G/H}(\overline{\alpha})$. 考虑映射 $\varphi : C \longrightarrow H\ (g \longmapsto g^{-1}g^{\alpha})$. 任取 $g_1,\ g_2 \in C$, 如果 $g_1^{-1}g_1^{\alpha} = g_2^{-1}g_2^{\alpha}$, 则 $(g_1g_2^{-1})^{\alpha} =$

$g_1g_2^{-1}$, 所以 $g_1g_2^{-1} \in C_G(\alpha) = 1$. 故 $g_1 = g_2$. 这说明 φ 是单射. 因为 H 是有限群, 所以 $C = H$. 因此 $\overline{\alpha}$ 是正则自同构.

注 3.1 从引理 3.1 的证明中, 不难看出, 如果 α 是群 G 的一个几乎正则自同构, 则 α 诱导的 G/H 的自同构 $\overline{\alpha}$ 是几乎正则的 (因为 $|C_{G/H}(\overline{\alpha})| = |C:H| \leqslant |C_G(\alpha)| < \infty$).

引理 3.2 设 G 是剩余有限 minimax 可解群, T 是 G 的有限正规子群, 则 G/T 是剩余有限 minimax 可解群.

证 由于 minimax 可解群对于商群是封闭的, 只需证 G/T 是剩余有限群即可. 任取 $1 \neq gT \in G/T$, 对任意的 $t \in T$, 有 $1 \neq gt \in G$. 注意到 G 是剩余有限群, 所以存在 $H_t \lhd G$, 使得 $gt \,\overline{\in}\, H_t$ 且 G/H_t 是有限群. 记 $H = \bigcap\limits_{t\in T} H_t$, 则

$$G/H = G/\bigcap_{t\in T} H_t \leqslant \prod_{t\in T} G/H_t.$$

由于 T 和 G/H_t 都是有限群, 因此 G/H 是有限群. 易知 G/HT 也是有限群. 如果 $g \in HT$, 则存在某个 $h \in H$,$t \in T$, 使得 $g = ht$. 从而 $gt^{-1} = h \in H$, 这就矛盾于 H 的构造. 因此 $g \,\overline{\in}\, HT$. 随之 $gT \overline{\in} HT/T$, 而 $HT/T \lhd G/T$ 且 $G/T\big/HT/T \simeq G/HT$ 是有限群, 所以 G/T 是剩余有限群.

定理 1.3 的证明 设 G 的挠子群为 T, 则 T 是剩余有限 minimax 可解群. 断言 T 是有限群. 设 T 的导长是 r, 则 T 存在下面的群列:

$$T = T^{(0)} > T^{(1)} > \cdots > T^{(r-1)} > T^{(r)} = 1.$$

对 r 进行归纳. 当 $r = 0$ 或 1 时, 明显地, T 是剩余有限 minimax 挠 Abel 群, T 满足子群极小条件, 又由于拟循环群肯定不是剩余有限的, 故 T 是有限群. 当 $r > 1$ 时, $T/T^{(r-1)}$ 的导长是 $r-1$, 归纳地假设 $T/T^{(r-1)}$ 是有限群. 而剩余有限 minimax 挠 Abel 群 $T^{(r-1)}$ 是有限群. 因此 T 是有限群.

记 $\varphi = \alpha^2$. 断言 $C_{G/T}(\overline{\varphi})$ 是 Abel 群的有限扩张. 如果 $C_{G/T}(\overline{\varphi}) = 1$, 显然 $\overline{\varphi}$ 是 G/T 的 2 阶正则自同构, 由引理 3.2 和文 [11, 定理 2] 知 G/T 是 Abel 群的有限扩张. 进而 $C_{G/T}(\overline{\varphi})$ 也是 Abel 群的有限扩张. 如果 $C_{G/T}(\overline{\varphi}) \neq 1$, 注意到 $\overline{\alpha}$ 与 $\overline{\varphi}$ 是可交换的, 于是 $C_{G/T}(\overline{\varphi})$ 是 $\overline{\alpha}$-不变的, 进而 $\overline{\alpha}$ 是 $C_{G/T}(\overline{\varphi})$ 的 1 阶或 2 阶自同构. 由于 T 是有限群, 由引理 3.1 知 $\overline{\alpha}$ 诱导了 G/T 的正则自同构, 即 $C_{G/T}(\overline{\alpha}) = 1$. 从而 $C_{C_{G/T}(\overline{\varphi})}(\overline{\alpha}) \leqslant C_{G/T}(\overline{\alpha}) = 1$. 因此 $\overline{\alpha}$ 诱导了 $C_{G/T}(\overline{\varphi})$ 的正则自同构. 然而 $C_{G/T}(\overline{\varphi}) \neq 1$, 所以 $\overline{\alpha}$ 是 $C_{G/T}(\overline{\varphi})$ 的 2 阶正则自同构. 由引理 3.2 和文 [11, 定理 2] 知 $C_{G/T}(\overline{\varphi})$ 是 Abel 群的有限扩张.

注意到 $C_G(\varphi)/C_G(\varphi) \cap T \simeq C_G(\varphi)T/T \leqslant C_{G/T}(\overline{\varphi})$, 于是 $C_G(\varphi)/C_G(\varphi) \cap T$ 是 Abel 群的有限扩张.

下证 $C_G(\varphi)$ 是 Abel 群的有限扩张. 因为 $C_G(\varphi)$ 是剩余有限 minimax 可解群, 所以任取 $1 \neq x \in C_G(\varphi) \cap T$, 存在 $x \,\overline{\in}\, H_x \lhd C_G(\varphi)$, 使得 $C_G(\varphi)/H_x$ 是有限群. 设 $H\big/C_G(\varphi) \cap T$ 是 $C_G(\varphi)/C_G(\varphi) \cap T$ 的指数有限的正规 Abel 子群, 则 $|C_G(\varphi) : H| < \infty$. 从而

$$C_G(\varphi)/\Big(\bigcap_x H_x\Big) \cap H \leqslant \prod_x C_G(\varphi)/H_x \times C_G(\varphi)/H$$

是有限群. 又 $\big(\bigcap\limits_x H_x\big) \cap H \cap (C_G(\varphi) \cap T) = 1$, 因此

$$\Big(\bigcap_x H_x\Big) \cap H = \Big(\bigcap_x H_x\Big) \cap H\Big/\Big(\bigcap_x H_x\Big) \cap H \cap (C_G(\varphi) \cap T)$$

$$\simeq \Big(\Big(\bigcap_x H_x\Big)\cap H\Big)\cdot (C_G(\varphi)\cap T)\big/C_G(\varphi)\cap T$$
$$\leqslant H/C_G(\varphi)\cap T$$

是 Abel 群. 于是 $\big(\bigcap_x H_x\big)\cap H$ 是 $C_G(\varphi)$ 的指数有限的正规 Abel 子群, 因此 $C_G(\alpha^2)$ 是 Abel 群的有限扩张.

由定理 1.3 可以得到下面的推论.

推论 3.1 设 G 是剩余有限 minimax 可解群, g 是 G 的一个 4 阶元素且 g 在 G 中的中心化子是 1, 则 $C_G(g^2)$ 是 Abel 群的有限扩张.

4 定理 1.4 的证明

引理 4.1 设 G 是剩余有限 minimax 可解群, α 是 G 的自同构, H 是 G 的 α-不变的有限正规子群. 如果 $C_G(\alpha)$ 是 Abel 群的有限扩张, 那么 $C_{G/H}(\overline{\alpha})$ 是 Abel 群的有限扩张.

证 记 $C/H = C_{G/H}(\overline{\alpha})$. 考虑映射 $\varphi: C \longrightarrow H$ $(g \longmapsto g^{-1}g^{\alpha})$. 一方面, 对于任意的 $x\in C_G(\alpha)$, 有

$$(xg)^{\varphi} = (xg)^{-1}(xg)^{\alpha} = g^{-1}x^{-1}x^{\alpha}g^{\alpha} = g^{-1}g^{\alpha}.$$

这说明陪集 $C_G(\alpha)g$ 中的所有元素都有相同的像 $g^{-1}g^{\alpha}$. 另一方面, 如果 $g_1^{-1}g_1^{\alpha} = g_2^{-1}g_2^{\alpha}$, 则

$$(g_1g_2^{-1})^{\alpha} = g_1g_2^{-1},$$

从而 $g_1g_2^{-1}\in C_G(\alpha)$. 所以 $C_G(\alpha)g_1 = C_G(\alpha)g_2$. 因此 $|C : C_G(\alpha)| \leqslant |H| < \infty$.

不失一般性, 我们可设 A 是 $C_G(\alpha)$ 的指数有限的特征 Abel 子群. 注意到 $C/A\big/C_G(\alpha)/A \simeq C/C_G(\alpha)$ 及 $C_G(\alpha)/A$ 是有限群, 于是 C/A 是有限群. 又由于 C/AH 是 C/A 的商群, 故

$$C_{G/H}(\overline{\alpha})\big/AH/H = C/H\big/AH/H \simeq C/AH$$

是有限群. 又因为 $AH/H \simeq A/A\cap H$ 是 Abel 群, 所以 $C_{G/H}(\overline{\alpha})$ 是 Abel 群的有限扩张.

引理 4.2 设 α 是 Abel 群 A 的 2 阶自同构, 则对于任意的 $x\in A$, x^2 可以表示为 $x^2 = ay^{-1}y^{\alpha}$, 其中 $a\in C_A(\alpha)$ 且 $y\in A$.

证 任取 $x\in A$, 记 $a = xx^{\alpha}$. 容易验证 $a\in C_A(\alpha)$. 显然, $x^{-1}x^{\alpha} = x^{-2}a \in [A,\ \alpha]$, 记 $u = x^{-2}a$, 则 $x^2 = au^{-1}$, 其中 $a\in C_A(\alpha)$ 和 $u^{-1}\in [A,\ \alpha]$. 因为 A 是 Abel 群, 所以 u^{-1} 可以写为 $y^{-1}y^{\alpha}$. 因此 $x^2 = ay^{-1}y^{\alpha}$, 其中 $a\in C_A(\alpha)$ 且 $y\in A$.

引理 4.3 设 G 是剩余有限 minimax 可解群, α 是 G 的 2 阶自同构, A 是 G 的 α-不变的无挠 Abel 子群. 如果 $C_G(\alpha)$ 是 Abel 群的有限扩张, 那么 $C_{G/A}(\overline{\alpha})$ 是 Abel 群的有限扩张.

证 记 $A_0 = A^2$. 显然 α 诱导了 G/A_0 上的自同构 $\overline{\alpha}_0$. 任取 $x\in G$, 使得 $xA_0 \in C_{G/A_0}(\overline{\alpha}_0)$, 则 $x^{\alpha} = xh$, 其中 $h\in A_0$. 由引理 4.2 知, $h = ay^{-1}y^{\alpha}$, 其中 $a\in C_A(\alpha)$ 且 $y\in A$. 因此 $x^{\alpha} = xay^{-1}y^{\alpha}$. 注意到 $x^{\alpha^2} = xa^2y^{-1}y^{\alpha^2}$, 于是 $a^2 = 1$. 因为 A 是无挠群, 所以 $a = 1$. 从而 $x^{\alpha} = xy^{-1}y^{\alpha}$, 进而 $(xy^{-1})^{\alpha} = xy^{-1}$. 因此 $v = xy^{-1}\in C_G(\alpha)$, 所以 $x = vy\in C_G(\alpha)A$. 这也就是说

$$C_{G/A_0}(\overline{\alpha}_0) \leqslant C_G(\alpha)A/A_0 = C_G(\alpha)A_0/A_0\cdot A/A_0.$$

记 $B = C_G(\alpha) \cap A_0$, 则 $C_G(\alpha)/B \simeq C_G(\alpha)A_0/A_0$. 设 A_1 是 $C_G(\alpha)$ 的指数有限的特征 Abel 群, 则 $C_G(\alpha)/A_1$ 是有限群. 又 $C_G(\alpha)/A_1B$ 是 $C_G(\alpha)/A_1$ 的商群, 故

$$C_G(\alpha)/B\big/A_1/A_1 \cap B \simeq C_G(\alpha)/B\big/A_1B/B \simeq C_G(\alpha)/A_1B$$

是有限群, 进而 $C_G(\alpha)/B$ 是 Abel 群的有限扩张. 不难看出 $C_{G/A_0}(\overline{\alpha}_0)$ 是 Abel 群的有限扩张. 注意到 $\overline{\alpha}_0$ 诱导了 G/A 的自同构 $\overline{\alpha}$ 以及 A/A_0 是有限群, 由引理 4.1 可知 $C_{G/A}(\overline{\alpha})$ 是 Abel 群的有限扩张.

引理 4.4 设 α 是群 G 的自同构. 如果 $[G,\ {}_n\alpha]$ 是有限群, 那么 $[G,\ {}_{n-1}\alpha]/C_{[G,\ {}_{n-1}\alpha]}(\alpha)$ 是有限群.

证 设 $[G,\ {}_n\alpha]$ 的阶数是 n. 我们考虑 $[G,\ {}_{n-1}\alpha]$ 的 $n+1$ 个元素 $g_1, g_2, \cdots, g_{n+1}$. 在

$$g_1^{-1}g_1^{\alpha},\ g_2^{-1}g_2^{\alpha},\ \cdots,\ g_{n+1}^{-1}g_{n+1}^{\alpha}$$

中至少有两个元素是相同的. 如果 $g_i^{-1}g_i^{\alpha} = g_j^{-1}g_j^{\alpha}$ $(i, j \in \{1, 2, \cdots, n+1\}, i \neq j)$, 则 $(g_ig_j^{-1})^{\alpha} = g_ig_j^{-1}$, 从而 $g_ig_j^{-1} \in C_{[G,\ {}_{n-1}\alpha]}(\alpha)$. 因此 $|[G,\ {}_{n-1}\alpha] : C_{[G,\ {}_{n-1}\alpha]}(\alpha)| \leqslant n$.

引理 4.5 设 G 是剩余有限 minimax 可解群, α 是 G 的 2 阶自同构. 如果 $C_G(\alpha)$ 是 Abel 群的有限扩张, 那么 $[G,\ {}_{n-1}\alpha]/[G,\ {}_n\alpha]$ 是 Abel 群的有限扩张.

证 事实上, 剩余有限 minimax 可解群 G 是有限秩的. 我们对 G 的 0- 秩 $r_0(G)$ 进行归纳. 当 $r_0(G) = 0$ 时, 显然结论成立. 当 $r_0(G) > 0$ 时, 如果 $[G,\ {}_n\alpha]$ 是有限群, 根据引理 4.4 知, $[G,\ {}_{n-1}\alpha]/C_{[G,\ {}_{n-1}\alpha]}(\alpha)$ 是有限群, 进而 $[G,\ {}_{n-1}\alpha]/C_{[G,\ {}_{n-1}\alpha]}(\alpha)[G,\ {}_n\alpha]$ 是有限群. 因为 $C_{[G,\ {}_{n-1}\alpha]}(\alpha) \leqslant C_G(\alpha)$ 是 Abel 群的有限扩张, 所以 $[G,\ {}_{n-1}\alpha]/[G,\ {}_n\alpha]$ 是 Abel 群的有限扩张. 如果 $[G,\ {}_n\alpha]$ 是无限群, 由文 [11, 引理 2] 得到 $[G,\ {}_n\alpha]$ 包含一个非平凡的无挠特征 Abel 子群 A. 由引理 4.3 知 $C_{G/A}(\overline{\alpha})$ 是 Abel 群的有限扩张. 注意到 $r_0(G/A) < r_0(G)$, 由归纳假设可得 $[G/A,\ {}_{n-1}\overline{\alpha}]/[G/A,\ {}_n\overline{\alpha}]$ 是 Abel 群的有限扩张. 因为 $[G/A,\ {}_n\overline{\alpha}] = [G,\ {}_n\alpha]/A$ 和 $[G,\ {}_{n-1}\alpha]/A\big/[G,\ {}_n\alpha]/A \simeq [G,\ {}_{n-1}\alpha]/[G,\ {}_n\alpha]$, 所以 $[G,\ {}_{n-1}\alpha]/[G,\ {}_n\alpha]$ 是 Abel 群的有限扩张.

定理 1.4 的证明 记 $\varphi = \alpha^2$. 由定理 1.3 知道 $C_G(\varphi)$ 是 Abel 群的有限扩张. 由引理 4.5 可以立刻得到我们的结果.

直接应用定理 1.4, 我们可以得到下面的推论.

推论 4.1 设 G 是剩余有限 minimax 可解群, g 是 G 的一个 4 阶元素且 g 在 G 中的中心化子是 1, 则 $[G,\ {}_{n-1}\ g^2]/[G,\ {}_ng^2]$ 是 Abel 群的有限扩张, 其中 $n \in \mathbb{Z}^+$.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵的修改意见.

参 考 文 献

[1] Robinson D J S. A course in the theory of groups (Second Edition) [M]. New York: Springer-Verlag, 1996.

[2] Burnside W. Theory of groups of finite order (Second Edition) [M]. New York: Dover Publications Inc, 1955.

[3] Gorenstein D. Finite groups [M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1980.

[4] Neumann B H. Group with automorphisms that leave only the neutral element fixed [J]. *Arch Math*, 1956, 7:1–5.

[5] Thompson J. Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order [J]. *Proc Nat Acad Sci*, 1959, 45:578–581.

[6] Higman G. Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements [J]. *J London Math Soc*, 1957, 64:321–334.

[7] 徐涛, 刘合国. 有限秩的可解群的正则自同构 [J]. 数学年刊 A 辑, 2014, 35(5):543–550.

[8] Gorenstein D, Herstein I N. Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order 4 [J]. *American J. Math.*, 1961, 83(1):71–78.

[9] Kovács L G. Group with regular automorphisms of order four [J]. *Math Z*, 1961, 75:277–294.

[10] Endimioni G, Moravec P. On the centralizer and the commutator subgroup of an automorphism [J]. *Monatsh Math*, 2012, 167:165–174.

[11] 刘合国, 徐涛. 剩余有限 minimax 可解群的几乎正则自同构 [J]. 中国科学 A 辑, 2012, 42(12):1237–1250.

[12] Gruenberg K W. Cohomological topics in group theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1970.

[13] Robinson D J S. Finiteness conditions and generalized soluble groups [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1972.

[14] Endimioni G. On almost regular automorphisms [J]. *Arch Math*, 2010, 94:19–27.

[15] 刘合国. 无限可解群全形的剩余有限性质 [J]. 中国科学 A 辑, 2002, 32(7):650–656.

[16] Kargapolov M I, Merzljakov J I. Fundamentals of the theory of groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1979.

On Regular Automorphisms of Order Four of Residually Finite Minimax Soluble Groups

XU Tao[1] LIU Heguo[2]

[1]Department of Science, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China. E-mail: gtxutao@163.com

[2]College of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan 430062, China. E-mail: ghliu@hubu.edu.cn

Abstract Let G be a residually finite minimax soluble group, and let α be a regular automorphism of order four of G. Then

(1) If the map $\varphi : G \longrightarrow G$ defined by $g^\varphi = [g, \alpha]$ is surjective, then G is centre-by-metabelian.

(2) Both $C_G(\alpha^2)$ and $[G,\ _{n-1}\alpha^2]/[G,\ _n\alpha^2]$ (where $n \in \mathbb{Z}^+$) are abelian-by-finite.

Keywords Residually finite, minimax soluble group, Regular automorphism, Almost regular automorphism

2000 MR Subject Classification 20E36